לוגיקה (1) – פתרונות תרגיל (9)

.1

א. $\exists x(\varphi(x)\vee\neg\varphi(x))$ אמיתי לוגית: לכל מבנה A ולכל השמה s אם $A(\varphi)[s]=T$ אז לפי הגדרת האמת $A(\varphi\vee\neg\varphi)[s]=T$. בפרט, אם נבחר השמה $s\begin{bmatrix}x\\a\end{bmatrix}$ השמה כלשהי, נקבל לפי הגדרת האמת עבור הכמת הישי ש- $A(\exists x(\varphi\vee\neg\varphi))=T$. אחרת $A(\varphi)[s]=F$ ואז לפי הגדרת האמת $A(\neg\varphi)[s]=T$ וכמו קודם נקבל ש- $A(\exists x(\varphi\vee\neg\varphi))=T$ ולכן, כמקודם, $A(\varphi\vee\neg\varphi)[s]=T$. כיוון ש-$A$ שרירותי הוכחנו שהפסוק אמיתי לוגית. (הערה: כיוון ש-s הייתה השמה כלשהי הוכחנו למעשה, $\forall x(\varphi\vee\neg\varphi)$ אמיתי לוגית).

ב. $(\forall x\exists y\varphi(x,y))\to(\exists y\forall x\varphi(x,y))$ הפסוק אינו אמיתי לוגית. כדוגמה ניקח: שפה $L=\{<\}$ ואת מבנה המספרים הטבעיים עם יחס הסדר התקני. נבחר $\varphi(x,y)=x<y$. עבור השמה כלשהי עם $s\begin{bmatrix}x\\a\end{bmatrix}$ נבחר השמה $s'\supset s$ (כלומר, s' נותנת לכל המשתנים אותו הערך כמו s, פרט אולי ל-y) המקיימת $s'\begin{bmatrix}x\\a+1\end{bmatrix}$. $N\models(\forall x\exists y\varphi(x,y))$ אםם $\min\{\max\{N(\varphi(x,y)[s,s']):s'\supset s\}=1$ בהינתן השמה s כלשהי נקבל ש- $N(\varphi(x,y))[s,s']=1$ עבור s' כמוגדר לעיל. לכן $N\models(\forall x\exists y\varphi(x,y))$. לעומת זאת, $N\models\neg(\exists y\forall x\varphi(x,y))$, כי אחרת, לפי הגדרת האמת של הכמת הישי הייתה השמה s'' עם $s''\begin{bmatrix}x\\b\end{bmatrix}$ כך שלכל השמה $s'''\supset s''$ $N(\varphi(s'''(x),s''(y)))[s''',s'']=T$ אבל אם נבחר $s'''\begin{bmatrix}x\\b+1\end{bmatrix}$. נקבל $N(\varphi(s'''(x),s''(y)))[s''',s'']=F$, כלומר $\max\{\min\{N(\varphi(x,y)[s,s']):s'\supset s\}=0$, בסתירה להנחה.

ג. $(\exists x\forall y\varphi(x,y))\to(\forall y\exists x\varphi(x,y))$ אמיתי לוגית. יהי A מבנה כלשהו לשפה. בה"כ $A\models(\exists x\forall y\varphi(x,y))$ (אחרת למי הגדרת האמת של הקשר $\leftarrow$ בוודאי $A\models(\exists x\forall y\varphi(x,y))\to(\forall y\exists x\varphi(x,y))$). לכן יש $a\in A$ והשמה $s\begin{bmatrix}x\\a\end{bmatrix}$ כך ש- $A(\forall y\varphi(x,y))[s]=T$. תהי s' השמה כלשהי עבור y. נרחיב את s' ע"י $s''\begin{bmatrix}x\\a\end{bmatrix}$ (כאשר a כמובטח לעיל). לפי הנחתנו $A(\forall y\varphi(x,y))[s'']=T$ ולפי הגדרת האמת זה גורר ש- $\min\{A(\varphi(x,y)[s'',s''']:s'''\supset s''\}=1$ (כאשר כאן s''' נותנת אותם ערכים לכל המשתנים, פרט אולי ל-x). בפרט אפשר לבחור $s'''=s''$ כלומר, $A(\varphi(x,y))[s'']=1$. אבל $s''(x)=s'(x)$ ולכן לפי הגדרת האמת לכמת הישי $A(\exists x\varphi(x,y))[s]=T$. כיוון ש-$s$ שרירותית נקבל את הנדרש.

ד. יהי A מבנה כלשהו לשפה, ו-s השמה כלשהי. המשפט הסמנטי של ההצבה (בתחשיב הפסוקים (!)) קובע שערך האמת של $\tau(\varphi_1(s(x)),\dots,\varphi_n(s(x)))$ במבנה כלשהו תלוי רק בערכי האמת של $\varphi_1(s(x))$ באותו מבנה (כלומר, $A(\tau(\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x))[s]=A'(\tau(p_1,\dots,p_n))$ כאשר A' מבנה לתחשיב הפסוקים המקיים: $A'(p_i)=A(\varphi_i)[s]$. כיוון ש- τ טאוטולוגיה

נקבל ש- $A'(\tau(p_1,\ldots,p_n)=T$ ולכן גם $A(\tau(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))[s]=T$. כיוון שההשמה הייתה שרירותית $A\models\forall x\tau(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))$. כיוון ש-$A$ שרירותי קיבלנו שהפסוק אמיתי לוגית.

.2

א. $\exists x\varphi(x)\vee\neg\exists x\varphi(x)$ מתקבל מההצבה $Sub(p\vee\neg p, p, \exists x\varphi(x))$.

ב. $\exists x\varphi(x)\vee\exists x\neg\varphi(x)$. הטווח של הכמת הישי הראשון הוא $\exists x\varphi(x)$ הטווח של הכמת הישי השני הוא $\exists x\neg\varphi(x)$, לכן הפסוק יכול להתקבל מהצבה של תחשיב הפסוקים באחד משני אופנים:

$i)$ הצבה של הפסוק כולו עבור פסוק יסודי p.

$ii)$ הצבה של $\exists x\varphi(x)$, $\exists x\neg\varphi(x)$ עבור פסוקים יסודיים בפסוק $p\vee q$.

בשני המקרים לא מדובר בטאוטולוגיות.

ג. $\forall x(\varphi(x)\vee\neg\varphi(x))$: הטווח של הכמת הכולל הוא כל הפסוק, לכן הדרך היחידה לקבל פסוק זה כהצבה מתחשיב הפסוקים הנה ע"י הצבה של $\forall x(\varphi(x)\vee\neg\varphi(x))$ עבור פסוק יסודי. כיוון ששום פסוק יסודי אינו טאוטולוגיה, הפסוק אינו טאוטולוגיה.

ד. $\forall x\varphi(x)\rightarrow\neg\exists x\neg\varphi(x)$: דומה לסעיף ב' פרט לכך שעלינו לבחון גם אפשרות שלישית: הצבה ב- $p\vee\neg q$, שגם היא אינה טאוטולוגיה (כיוון שלפי הגדרת ההצבה, מן העובדה ש- $\forall x\varphi\neq\neg\exists x\neg\varphi$ - כלומר, אלו פסוקים שונים – בהכרח $p\neq q$.

.3

א. ראו בחוברת הקורס.

ב. ראו בחוברת הקורס.

ג. נביט בנוסחה $\varphi(y)=\forall x(y<x\vee y=x)$. יהי $t=x+1$. אז t אינו כשר להצבה ב- φ כיוון ש-y נמצא בטווח של הכמת הכולל, המכמת על x, שמופיע גם ב-t. ואמנם אם נביט במבנה הטבעיים ונבחר השמה $s\begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}$ נקבל $N(\forall x(y<x\vee y=x))[s]$ (כיצד תראו זאת באופן פורמלי) בעוד שלאחר ההצבה נקבל את הפסוק $\forall x(x+1<x\vee x+1=x)$ שכלל אינו תלוי בהשמה s, וברור שהפסוק האחרון אינו אמיתי ב-N (מהי ההוכחה הפורמלית לטענה).

.4

א. כרגיל ההוכחה היא באינדוקציה על היצירה (ראשית של שמות העצם ואח"כ על הנוסחות).

הערה: כדי שלא לסרבל את הרישום נכתוב לשם עצם t, $A(t)[s]=t^{A,s}$ ולנוסחה φ נכתוב $A(\varphi)[s]=\varphi^{A,s}$. תהי s השמה כלשהי למשתנים, נוכיח את הטענה עבור s. נתחיל בשמות העצם. נראה שאם t ש"ע ב- L' אז $t^{A,s}=t^{B,s}$:

$i)$ אם t קבוע אישי c אזי מהנתון $c^A=c^B$.

$ii)$ אם t משתנה אישי x אזי $s(x)=s(x)$ ואין מה להוכיח.

$iii)$ אם $t=f(t_1(x_1\ldots x_k),\ldots,t_n(x_1\ldots x_k))$ אז לפי הנחת האינדוקציה $t_i^{A,s}(x_1\ldots x_k)=t_i^{B,s}(x_1\ldots x_k)$. מהנחתנו $f\in L'$ ומהגדרת הערך של ש"ע ומהנתון נקבל:

$$t^{A,s}=f^A(t_1^{A.s}(x_1\ldots x_k),\ldots,t_n^{A,s}(x_1\ldots x_k))=f^B(t_1^{A.s}(x_1\ldots x_k),\ldots,t_n^{A,s}(x_1\ldots x_k))=$$
$$f^B(t_1^{B.s}(x_1\ldots x_k),\ldots,t_n^{B,s}(x_1\ldots x_k))=t^{B,s}$$

כנדרש.

עתה נוכיח את הטענה לנוסחות ב- L'. נראה שלכל $\varphi\in L'$ מתקיים $\varphi^{A,s}=\varphi^{B,s}$.

iv) אם $\varphi = R(t_1,\dots t_n)$ אז מההנחה, וממה שהראנו על שמות עצם נקבל:

$$R^A(t_1^{A.s}(x_1\dots x_k),\dots,t_n^{A,s}(x_1\dots x_k)) = R^B(t_1^{A.s}(x_1\dots x_k),\dots,t_n^{A,s}(x_1\dots x_k)) =$$
$$f^B(t_1^{B.s}(x_1\dots x_k),\dots,t_n^{B,s}(x_1\dots x_k))$$

כנדרש.

v) עבור $\varphi = \neg\varphi_1;\ \varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ הטענה נובעת ישירות מהגדרת האמת.

vi) עבור $\varphi = \exists x\psi(x,y)$ נשים לב ש- $\psi(x,y)$ נוסחה ב- L'. לכן אם $A(\varphi(y))[s]$ זה אומר שיש השמה $s' \supset s$ כך ש- $A(\psi(x,y))[s']$. לפי הנחת האינדוקציה $B(\psi(x,y))[s'] = T$ ולכן $B(\varphi(y))[s] = T$ (מדוע) כנדרש.

ב. יהי $A \models \varphi$ מבנה לשפה. עלינו להראות שלכל השמה s מתקיים $A(\psi)[s] = T$. תהי, אם כן, s השמה כלשהי ויהי $s(x) = a \in A$. נגדיר מבנה A' באופן הבא: העולם של A' הוא העולם של A, ולכל סימן יחס/פונקציה/קבוע אישי בשפה פרט ל-c נגדיר $f^{A'} = f^A$ וכו'. עבור c נגדיר $A'(c) = s(x)$. לפי סעיף א', $A' \models \varphi$ (כי c אינו ב- φ), ולכן $A' \models \psi(c)$ (מהנתון ש- $\varphi(x) \models \psi(c)$). אבל לפי ההגדרה $A' \models \psi(c)$ אםם $A' \models \psi(c^{A'})$ ולפי הגדרת A' $A'(c) = s(x)$, כלומר, $A'(\psi(x))[s] = T$, לפי סעיף א' (כי c אינו ב- ψ) זה שקול לכך ש- $A(\psi(x))[s] = T$.

5.

א. לכל $\varphi \in \Gamma$ נסמן ב- $l(\varphi)$ את סך כל מספר הקשרים המופיעים ב- φ. יהי $c = \sum_{\varphi\in\Gamma} l(\varphi)$ כיוון ש- Γ סופית c סופי אף הוא. תהי Ω קבוצת כל הקדקודים בעץ האמת של Γ. לכל $\eta \in \Omega$ ב- Γ_η את קבוצת הפסוקים היושבת בקדקוד η ונגדיר את c_η בהתאם.

טענה: אם η' צאצא של η אז $c_{\eta'} < c_\eta$.

ההוכחה היא באינדוקציה על בניית העץ, והיא נובעת ישירות מכללי עץ האמת.
קיבלנו של עץ האמת של Γ עומק c לכל היותר, ולכן מספר הקדקודים בעץ חסום מלעיל ע"י 2^c (שכן לכל קדקוד בעץ שני בנים לכל היותר).